Представленный ниже алгоритм вычисления не является универсальным и создавался исключительно под определенную конфигурацию конечного устройтва с возможностью небольших её изменений.

**Постановка задачи**

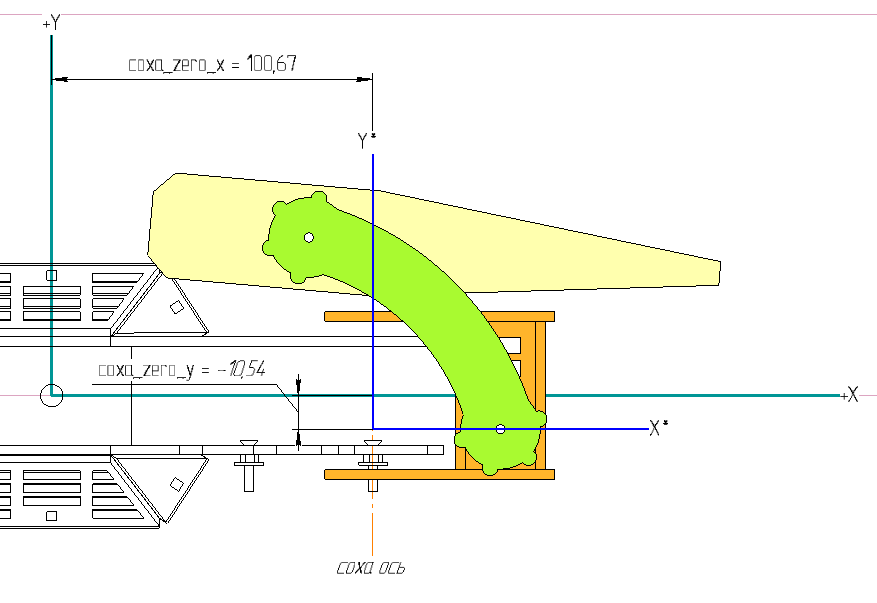
Необходимо дотянутся конечностью до точки A с координатами (114.78; 0; 207.95). Точка выбрана случайным образом.

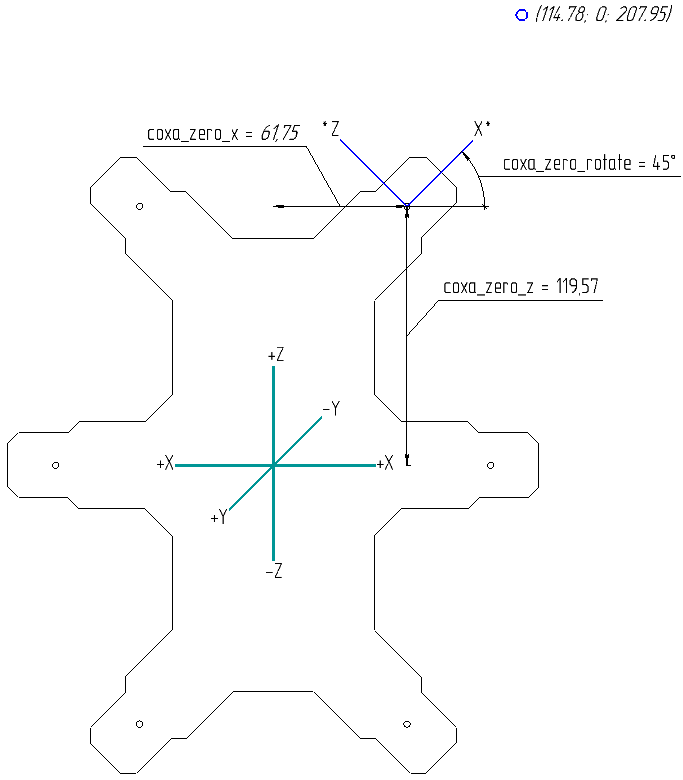
**Этап 1. Вычисление угла COXA**

Для прохождения данного этапа понадобится ряд параметров:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Параметр** | **Описание** | **Значение** |
| coxa\_zero\_x | Положение оси COXA по оси X | 61.75 |
| coxa\_zero\_y | Положение оси COXA -> FEMUR по оси Y | -10.54 |
| coxa\_zero\_z | Положение нуля COXA по оси Z | 119.57 |
| coxa\_zero\_rotate | Угол поворота нуля COXA относительно оси X | 45 |

Ниже представлено визуальное отображение данных параметров на примере реального устройства.





Перед началом вычислений необходимо перейти в новую систему координат (X\*, Y\*, Z\*). Для этого необходимо пересчитать координаты целевой точки А относительно (X\*, Y\*, Z\*).

Для пересчета координат точки у нас есть все необходимые параметры, а именно положение новой системы координат в старой и угол её поворота. Для расчета воспользуемся следующими формулами:

где координаты точки А относительно (X\*, Y\*, Z\*) без учета поворота.

После вычисления координат осталось выполнить поворот на угол coxa\_zero\_rotate. Так как вращение происходит по оси Y, то нужно пересчитать только координаты . Для этого воспользуемся следующими формулами:

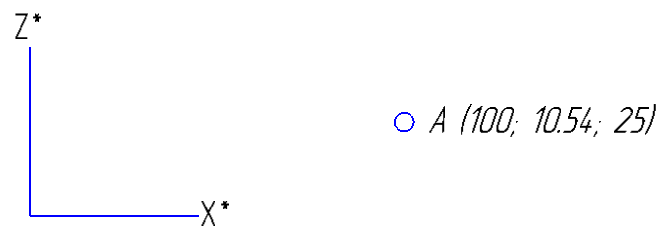
Конечные формулы для перехода в новую систему координат с поворотом по оси Y на угол :

- координаты точки в новой системе координат

- координаты точки в старой системе координат

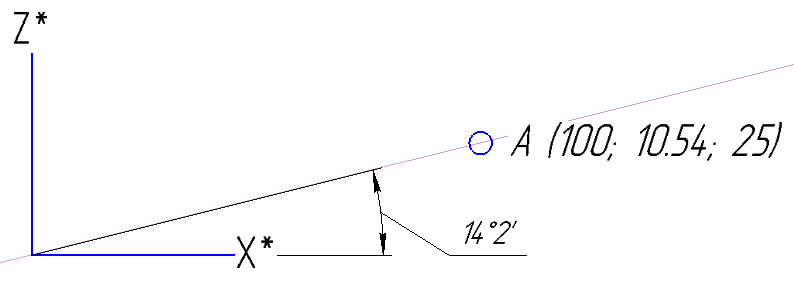
- положение новой системы координат в старой

После перехода в новую систему координат можно рассмотреть задачу на плоскости (X\*, Z\*) следующим образом (ось Y нам пока не нужна):



Можно рассчитать угол поворота COXA по следующей формулой:

Мы получили угол, на который нужно повернуть COXA, чтобы ось Х\* и точка А находились на одной прямой. Проверяем наши вычисления:



КОМПАС показывает похожий угол. Расчеты верны.

**Этап 2. Вычисление углов FEMUR и TIBIA**

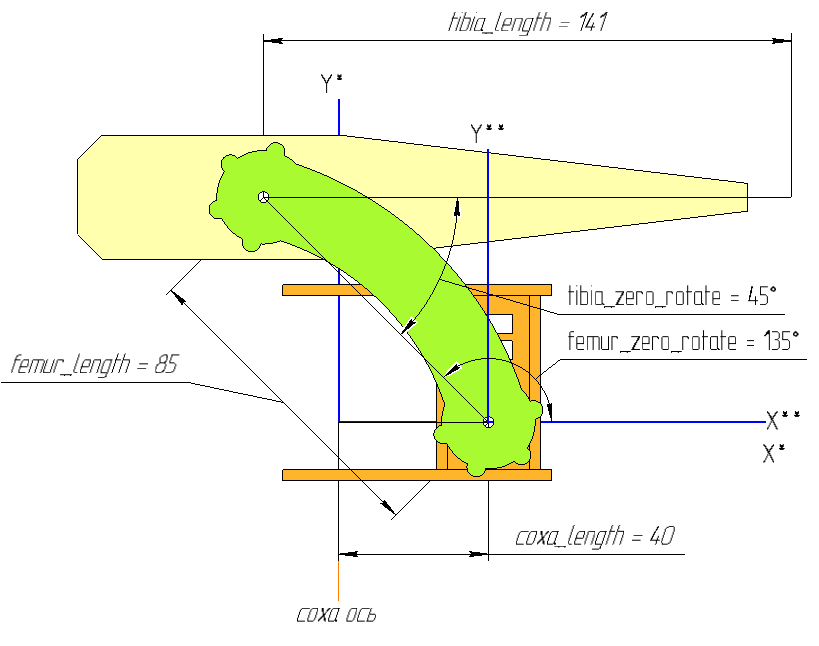
Для прохождения данного этапа понадобится ряд параметров:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Параметр** | **Описание** | **Значение** |
| femur\_zero\_rotate | Угол поворота нуля FEMUR относительно оси X | 135 |
| tibia\_zero\_rotate | Угол поворота нуля TIBIA относительно FEMUR | 45 |
| coxa\_length | Длина COXA | 40 |
| femur\_length | Длина FEMUR | 85 |
| tibia\_length | Длина TIBIA | 141 |

Для удобства вычислений необходимо сделать так, чтобы точка А лежала в одной плоскости с FEMUR и TIBIA. Для этого нужно выполнить поворот точки вокруг оси Y\* на угол :

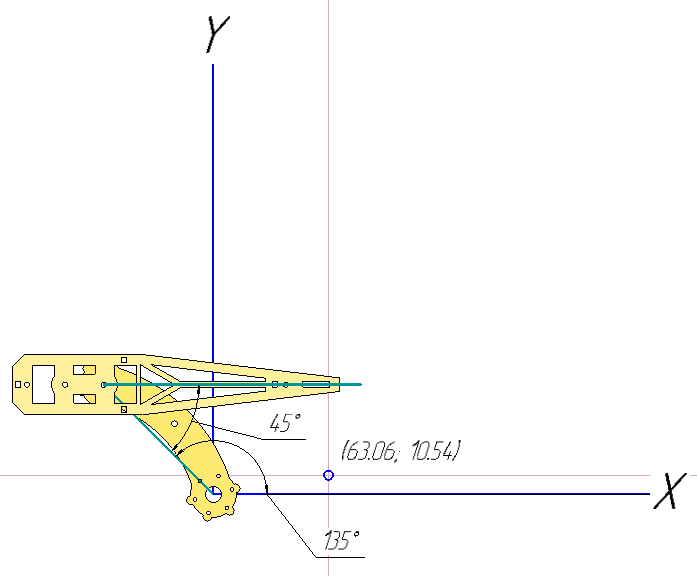
Теперь можно перейти из пространства в плоскость (, чтобы упростить дальнейшее решение задачи.

Можно преставить конечность в плоскости (X\*, Y\*):



Проводить вычисления углов для FEMUR и TIBIA относительно оси Y\* неудобно и нужно перейти в систему координат (X\*\*, Y\*\*) убрав TIBIA из расчетов. Так видно из рисунка нам нужно сдвинуть точку по оси X:

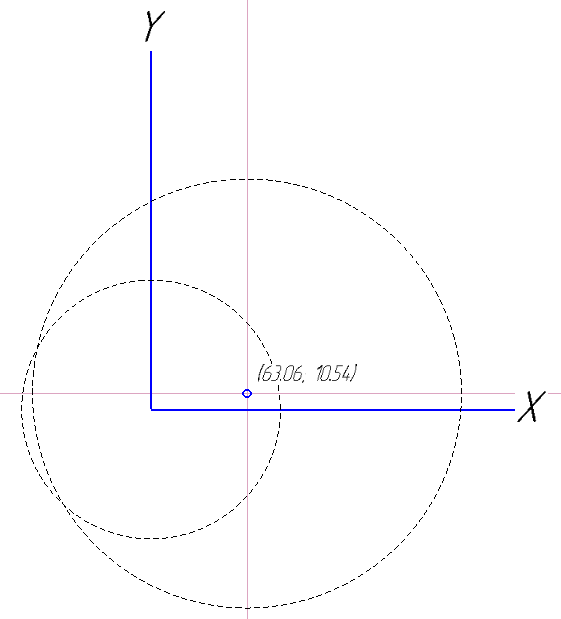
Теперь мы находимся в плоскости (X\*\*, Y\*\*). Для дальших вычислений обозачим её просто (X, Y), предыдущие расчеты нам теперь не нужны.



Для начала необходимо найти координаты всех возможных точек, где может находиться FEMUR для достижения точки (150: 150). Сделать это можно путем нахождения координат точек пересечения двух окружностей:

- с радиусом равным длине FEMUR **(R0 = femur\_length = 85)** находится в точке (0; 0);

- с радиусом равным длине TIBIA **(R1 = tibia\_length = 141)** находится в точке (63.06; 10.54);



Так как МК не может визуально определить есть ли точки пересечения или нет, то необходимо проверить это математически путем вычисления расстояния между окружностями:

, где x и y - координаты центра второй окружности (в данном случае целевой точки)

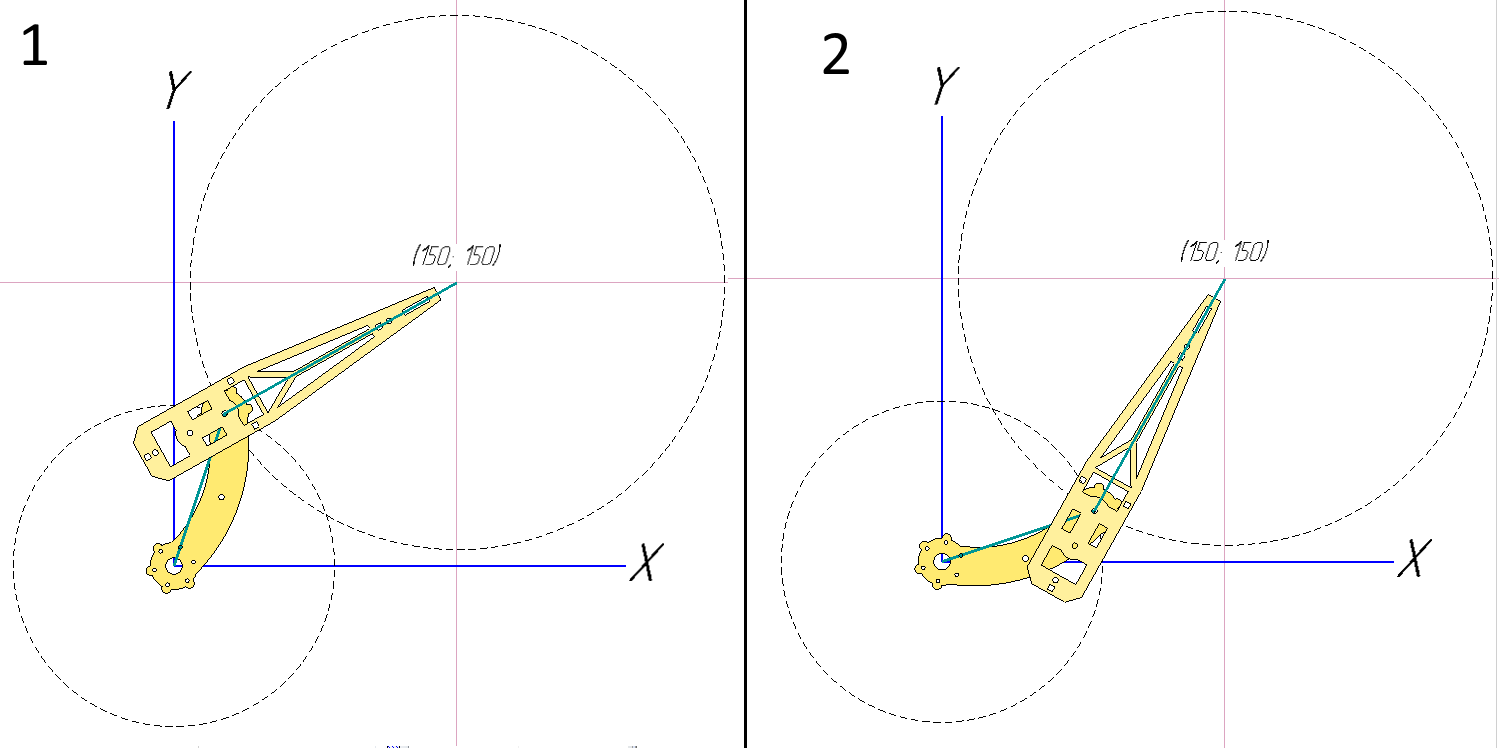
Первая окружность всегда будет находится в начале координат и именно для этого мы убрали COXA из расчетов перейдя в (X\*\*, Y\*\*).

Задача имеет решения если: R1 + R2

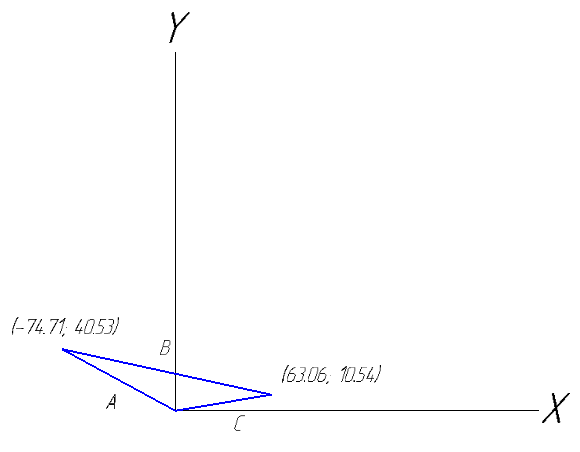
Так как , тозадача имеет решение и наша нога сможет дотянуться до этой точки. Необходимо найти координаты точек пересечения. Как это сделать хорошо описано тут: <http://www.litunovskiy.com/gamedev/intersection_of_two_circles/>

http://mathforum.org/library/drmath/view/51836.html

После нахождения точек пересечения (-74.71; 40.53) и (-57.47; -62.63) необходимо выбрать нужную нам точку. Выбор точки зависит от необходимого конечного положения звеньев манипулятора. Наиболее логично в случае с ногой взять 1 вариант, а значит нужна точка пересечения находится по координатам (-74.71; 40.53), так как она располагается выше.



После описанных выше вычислений мы получаем треугольник, все стороны которого известны.



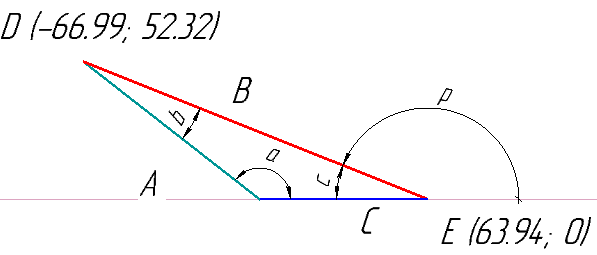
Находить углы в таком виде неудобно и было решено повернуть треугольник так, чтобы целевая точка лежала на оси Х. Для поворота нам нужно найти угол между осью X и прямой C:

Далее выполняем поворот на 9.48 градусов к оси Х и пересчитываем координаты точек по следующим формулам:

Получаем две новые точки:

- Точка пересечения: D (-66.99; 52.32)

- Целевая точка: E (63.94; 0)

После всех манипуляция мы следующий треугольник. При данном расположении треугольника очень просто найти углы и . 

Угол является углом между осью X и прямой A. Данный угол находится, используя координаты точки пересечения следующим образом:

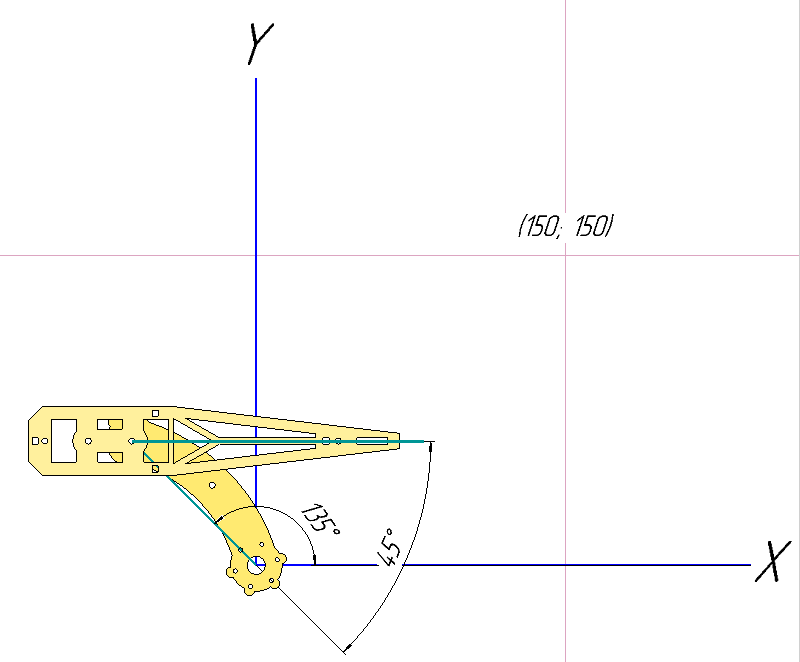
Для нахождения угла так же воспользуемся функцией , только перед этим необходимо переместить начало координат в точку P и найти угол :

Далее можно найти угол по следующей формуле:

Исходя из того, что сумма углов треугольника равна , можно найти последний угол :

Полная формула нахождения угла :

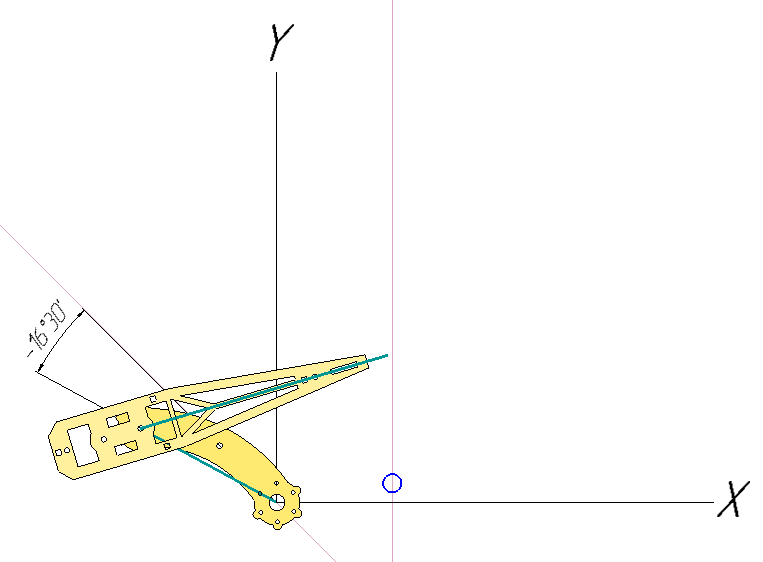
Теперь необходимо найти углы FEMUR и TIBIA относительно их начального положения.



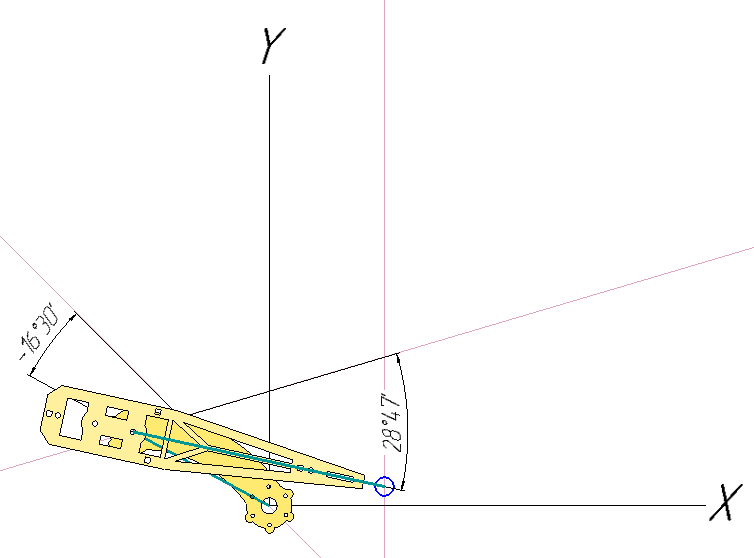
Тут все просто. Зная начальный угол femur\_zero\_rotate и требуемый угол можно найти угол поворота сервопривода FEMUR, так же необходимо помнить, что при расчетах мы повернули оси на угол , соответственно нужно его компенсировать.

Далее можно вычислить угол поворота сервопривода TIBIA по следующей формуле:

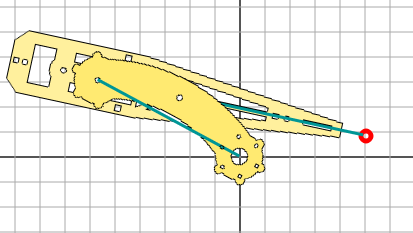
Проверим наши вычисления в КОМПАСЕ. Для начала повернем FEMUR на -16.5 градусов относительно его нуля. В нашем случае положительным вращением сервопривода является вращение по часовой стрелке.



Теперь повернем TIBIA на 28.79 градусов



Результат вычислений в симуляторе конечности



При решениях данной задачи не учитывались физические и какие-либо еще ограничения на поворот конечностей. Решение об этом должен принимать более высокий уровень, а то и так сложная математика будет еще сложнее.